ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЛИНИЙ КИНЕМАТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Рассматриваемые кривые:

- **Трансцендентные**
- **Циклические**
- **винтовые**

Кинематическая модель плоской кривой

$$p(t) = r(t)\,c(t),$$

где $r(t)$ – закон изменения радиуса окружности;

$c(t)$ – параметрическая модель окружности единичного радиуса с центром в начале координат;

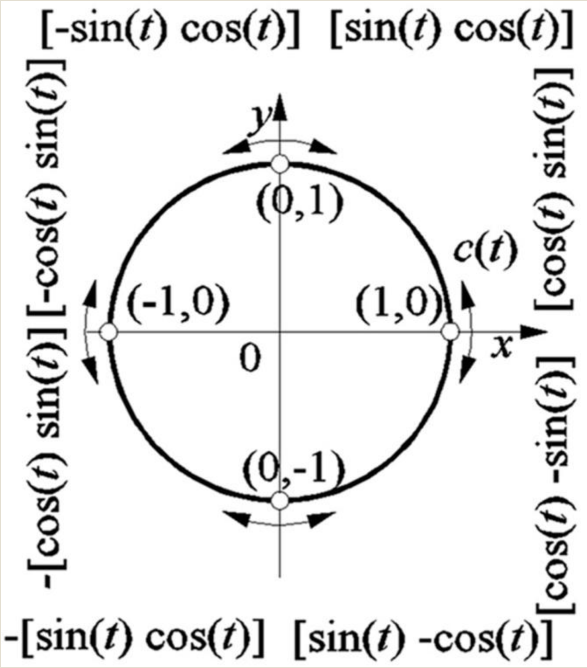
t – параметр, характеризующий время движения.

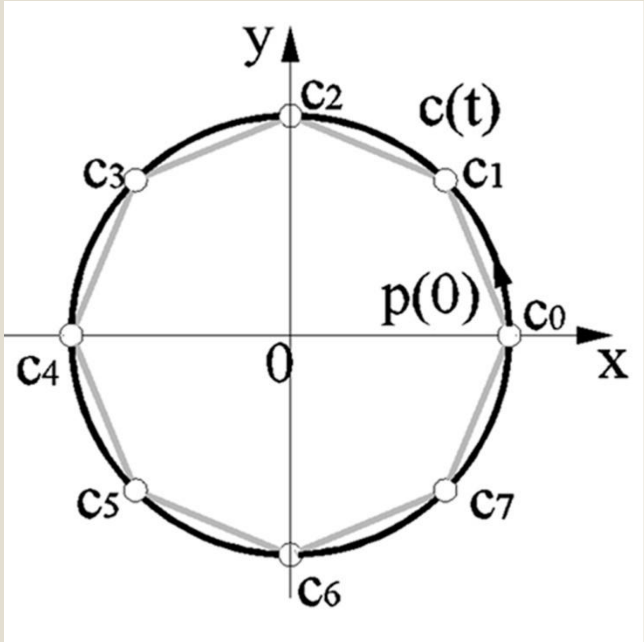
Параметрическая модель окружности

закон кругового движения точки:

$$c(t) = p(0)\,R(t)$$

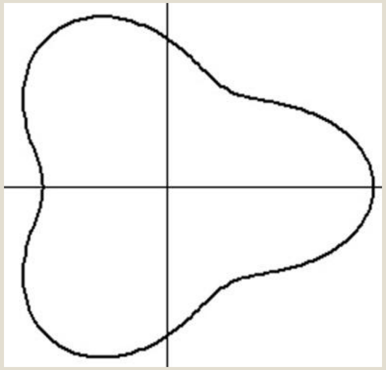
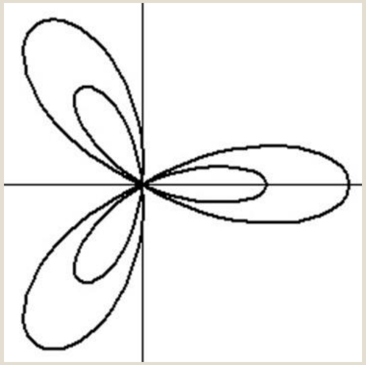
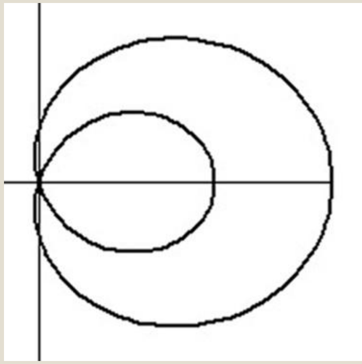
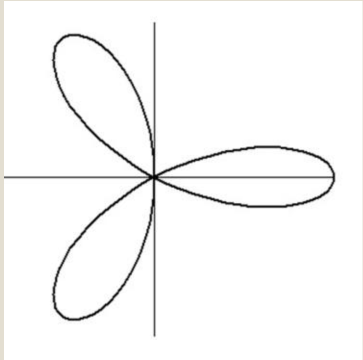
$$p(0) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \qquad R(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}$$





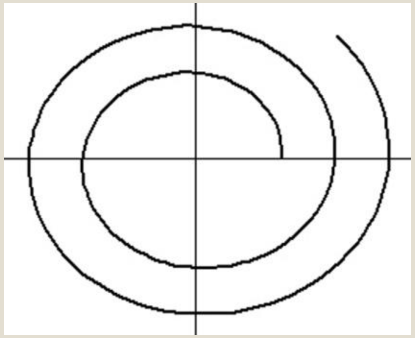
Трансцендентные кривые

$$r(t) = a \pm b\sin(kt) \quad \text{или} \quad r(t) = a \pm b\cos(kt)$$

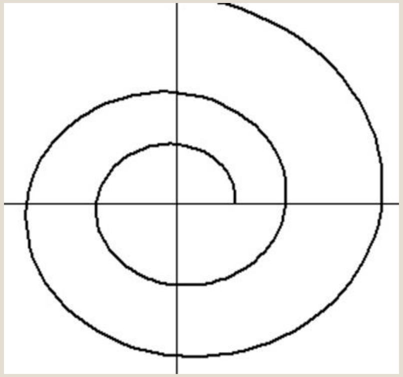
спираль Архимеда

$$r(t) = r_0 + r_1\, t,$$



эвольвента окружности

$$r(t) = r_0\sqrt{1 + t^2}$$



Циклические кривые

- Циклические кривые
- Циклоида
- Эпициклоида
- Гипоциклоида

Циклические (циклоидальные) кривые образуются сложением равномерного вращательного движения фиксированной точки по окружности переменного радиуса и поступательного переносного движения центра окружности по траектории pн(t).

$$p(t) = r(t)\,c(\omega t) + p\text{н}(t),$$

где $r(t)$ – закон изменения радиуса окружности;

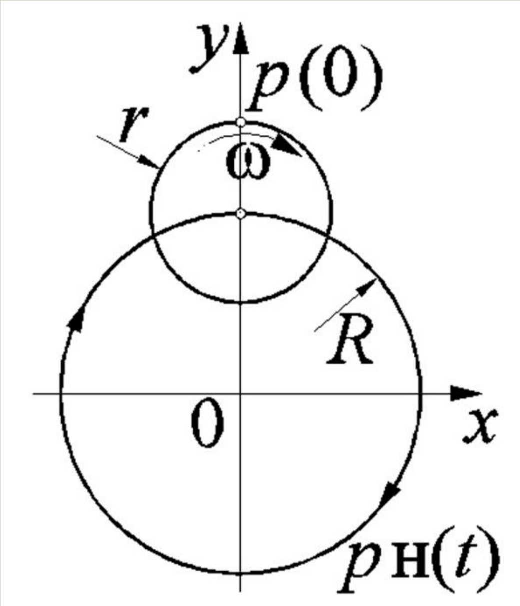
$c(\omega t)$ – параметрическое уравнение окружности единичного радиуса в начале координат;

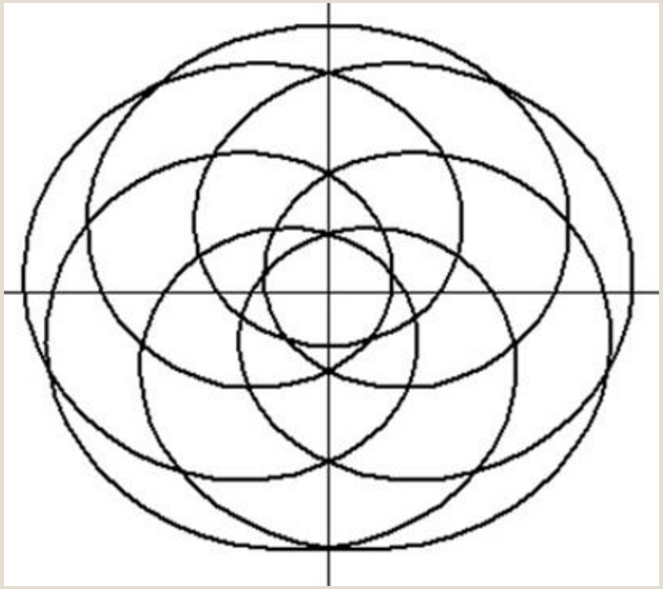
ω – частота относительного вращения, согласованная с переносным движением и равная числу оборотов точки при изменении t на 2π.

Циклическая линия

Простейшая циклическая кривая, полученная вращением точки $p(0)$ окружности радиуса r с угловой скоростью ω, центр которой равномерно перемещается по другой окружности радиуса R.

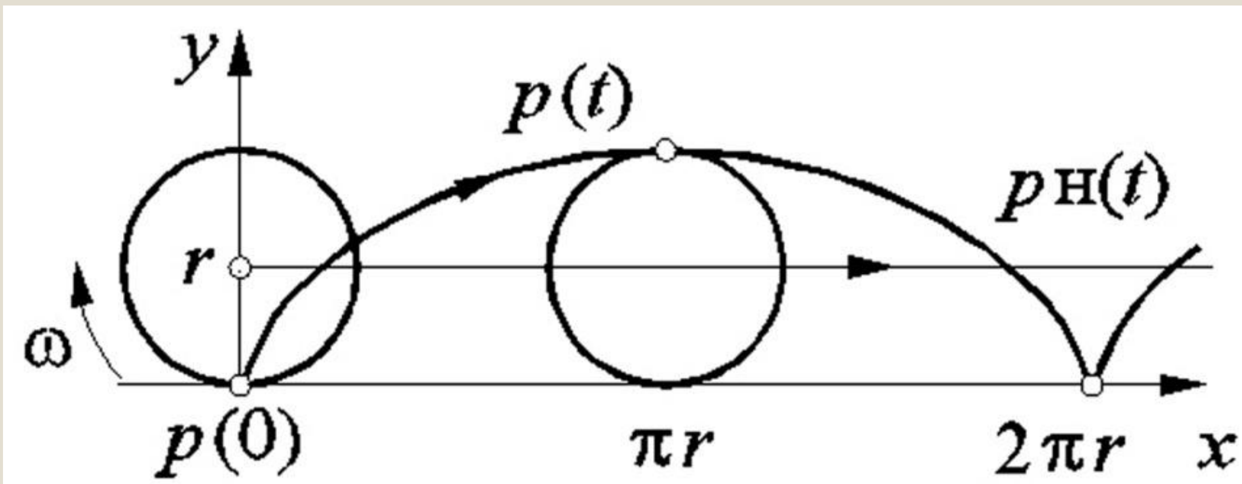
$$p(t) = r\,[\sin(\omega t) \quad \cos(\omega t)] + R\,[\sin(t) \quad \cos(t)].$$





Циклоида

Циклоида – траектория движения фиксированной точки окружности, радиуса *r* при ее качении без скольжения по прямой.

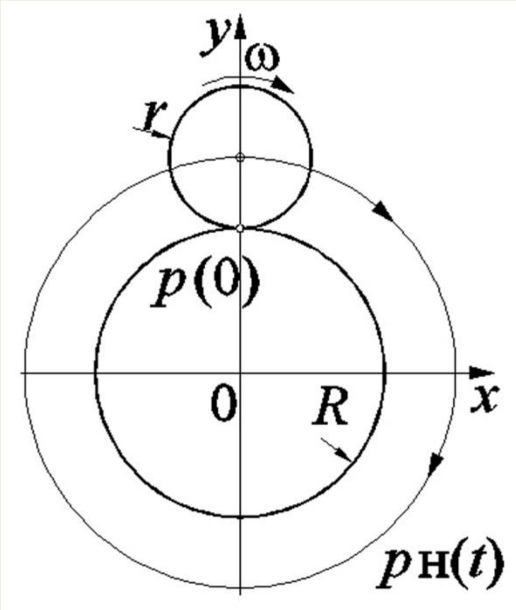


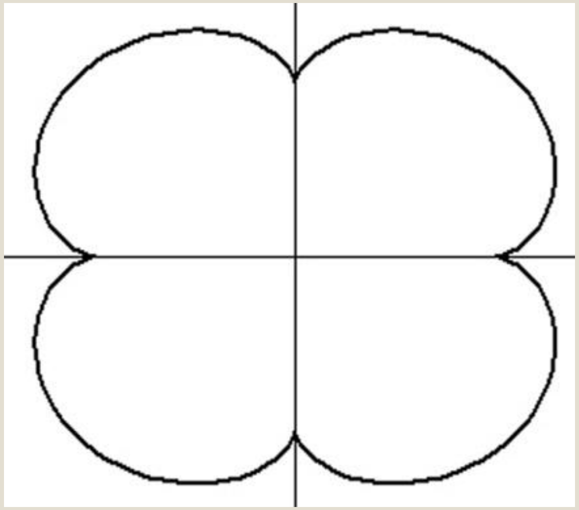
$$p(t) = -r[\sin(t) \quad \cos(t)] + r\,[t \quad 1] = r\,[t - \sin(t) \quad 1 - \cos(t)].$$

Эпициклоида

Эпициклоида – траектория движения фиксированной точки окружности радиуса *r* при ее качении без скольжения снаружи окружности радиуса *R*.

$$p(t) = \begin{bmatrix} (r+R)\sin(t) - r\sin(\omega t) \\ (r+R)\cos(t) - r\cos(\omega t) \end{bmatrix}^T.$$

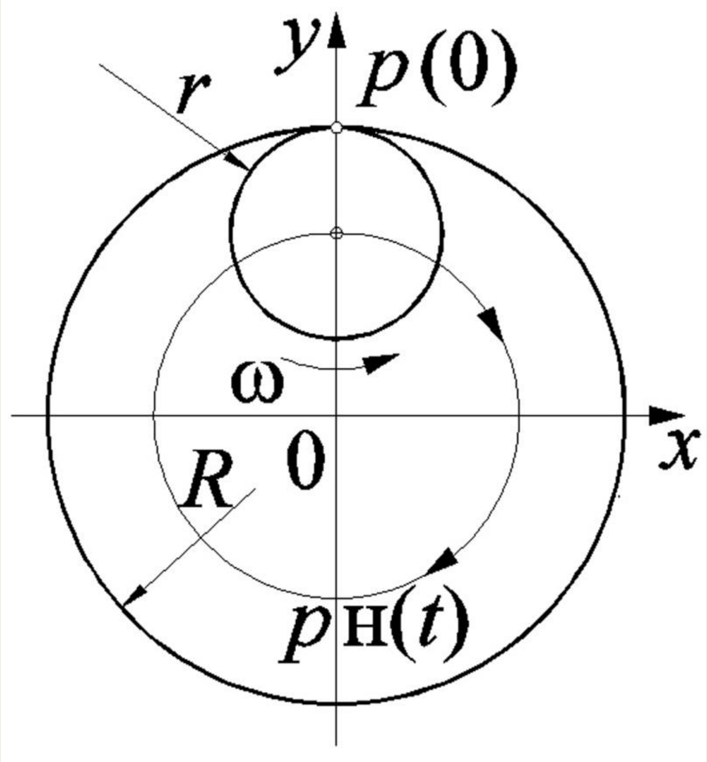


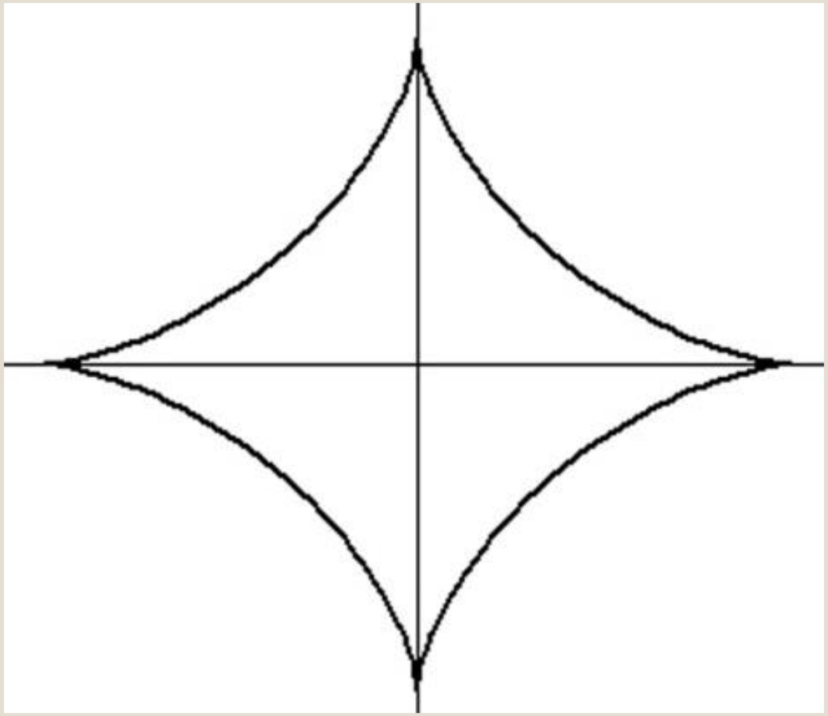


Гипоциклоида

Гипоциклоида – траектория движения закрепленной точки окружности радиуса *r* при ее качении без скольжения внутри окружности радиуса *R*.

$$p(t) = \begin{bmatrix} (R-r)\sin(t) - r\sin(\omega t) \\ (R-r)\cos(t) + r\cos(\omega t) \end{bmatrix}^T.$$





Винтовые и спиральные линии

Винтовая линия образуется сложением вращательного движения точки вокруг неподвижной оси и переносом её вдоль этой оси по определенному закону.

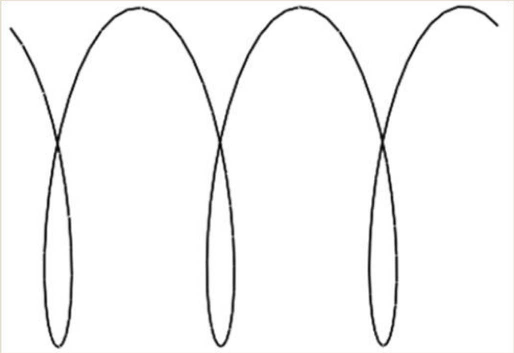
$$p(t) = r(t)\, c(t) + p\text{н}(t), 0 \le t \le 2\pi n,$$

где $r(t)$ – закон изменения радиуса окружности;

$c(t)$ – закон кругового движения точки единичного радиуса относительно начала координат;

$p\text{н}(t)$ – закон переносного движения точки; n – число витков

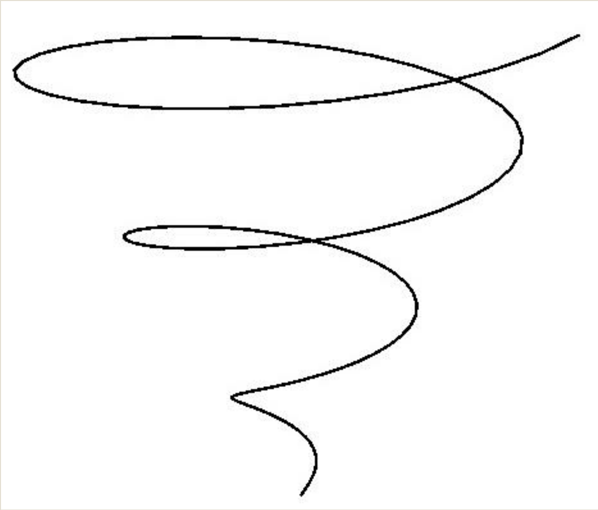
Цилиндрическая винтовая линия получается сложением движения точки по окружности одинакового радиуса и переносного движения вверх по оси перпендикулярно окружности.



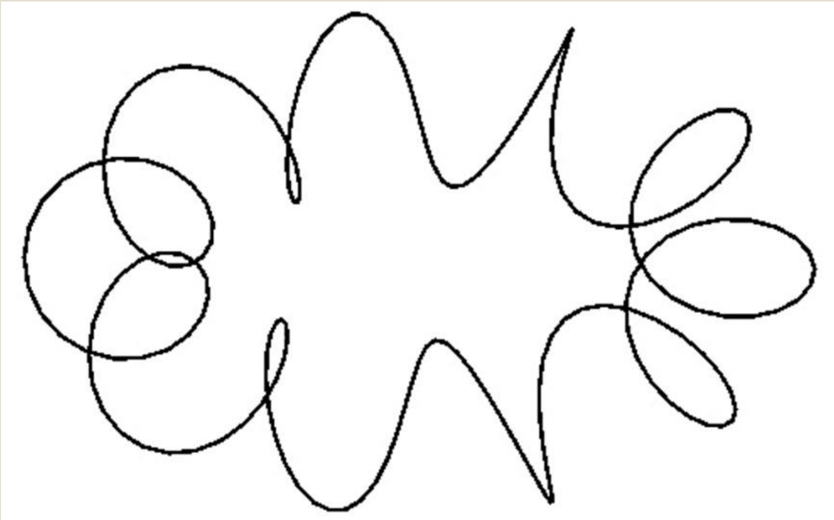
Если вращение происходит по спирали Архимеда и равномерного переносного движения, то винтовая линия называется конической.

Торовая спиральная линия получается сложением движения точки по окружности с частотой ω и одновременным её вращением вокруг одной из координатных осей

Коническая



Торовая



Примеры выполненных заданий

Построить изображение линии и выполнить анимацию точки по траектории в программе MathCAD.